算数科学習指導案

日　時　令和２年２月 17 日（月）
授業者　北海道教育大学附属釧路中学校　赤本　純基
児　童　岩手県盛岡市立土淵小学校　第６学年
授業場　岩手県盛岡市市立土淵小学校

【題材名】　碁石の数え方を説明する

【主な数学的活動】

イ　算数の学習場面から算数の問題を見いだして解決し，解決過程を振り返り統合的・発展的に考察する活動

ウ　問題解決の過程や結果を，目的に応じて図や式などを用いて数学的に表現し伝え合う活動

１．本時の目標

正三角形の 1 辺にいくつか並べた碁石の総数を求める活動を通して，1 辺の碁石の個数を擬変数や文字を使って表した碁石の総数を求める式の意味について説明することができる．

２．本時の位置付けと問題について

(1)　本時の位置付け

本時は学習指導要領では A 数と計算(2)イ(ア)「問題場面の数量の関係に着目し，数量の関係を簡潔かつ一般的に表現したり，式の意味を読み取ったりすること.」にあたる．これらの内容を数学的活動，特に「問題解決の過程や結果を，目的に応じて図や式などを用いて数学的に表現し伝え合う活動」を通して扱う場面として位置付く（文部科学省，2017)．

(2)　問題と問題提示の工夫について

図１のような正三角形に並んだ碁石全部の個数を求めることが本時の問題である．

（図１：正三角形に並んだ碁石）

碁石全部の個数を求めるためには様々な囲み方があることを捉え，それぞれの囲み方に対応する式を導き出したり，式に対応する囲み方を見いだしたりすることを通して，碁石全部の個数の求め方について様々な視点から考察するような展開としたい．

次に，問題提示の工夫についてである．まず，この事象について把握するために，1 辺の碁石の個数が，3 個や 4 個のときの碁石全部の個数について考えさせた後，1 辺の碁石の個数が 11 個のときの図を提示する．ただし，画面に提示した後，数秒後に画面を消す．すると，1 辺の碁石の個数は何個だったか，子供によって捉え方が変わってくる．碁石全部の個数を求める式をつくらせ，同じ考え方だが，1 辺の碁石の個数の部分が異なる式を引き出していく．はじめに，11×3－3 の式を取り上げ，その式がどんな考え方でつくられたものなのか問うた後，10×3－3 や 12×3－3 といった式を引き出す．ここで，式でいつも一定で変わらない数は何で，いろいろと変わる数は何か明らかにし，それらの意味について考えさせる。そして，いろいろと変わる数のかわりに文字が使えることを想起させ，1 辺の碁石の個数を文字を使って表すこととする．こうした指導により，擬変数を文字で表現することで簡潔な表現として一般化することができるよさに触れることをねらいたい．

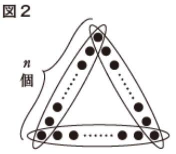
３．本時の主張

(1)事柄が成り立つ理由を筋道立てて説明すること

事象を数学的に考察する場面では，事柄が成り立つ理由を筋道立てて説明することが大切であると考える．そこで，今回の授業では，正三角形に並んだ碁石全部の個数を求める式(擬変数)×3－3 と図の囲み方を比べて，式の「(擬変数)×3」が「1 辺の碁石の個数のまとまり 3 つ分」を意味することや,「－3」が「2 回数えられている碁石の個数」を意味することを読み取る場面を位置付けた．事柄が成り立つ理由を筋道立てて説明することに関連して，H.25 全国学力･学習状況調査 B$\boxed{6}$(3)では，「事象を数学的に表現したり，数学的に表現された結果を事象に即して解釈したりすることを通して，事柄が成り立つ理由を筋道立てて説明することができるかどうかをみる.」ことを趣旨として次のような設問が出題されている（国立教育政策研究所，2013)．

（3）図２のような囲み方をすると，碁石全部の個数は，$3n-3$という式で求めることができます。碁石全部の個数を求める式が$3n-3$になる理由は，次のように説明できます。

図２

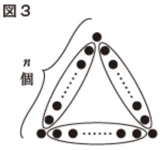


説明

> 正三角形の辺ごとにすべての碁石を囲んでいるので，１つのまとまりの個数はn個である。同じまとまりが３つあるので，このまとまりで数えた碁石の個数は$3n$個になる。このとき，各頂点の碁石を２回数えているので，碁石全部の個数は$3n$個より３個少ない。
> したがって，碁石全部の個数を求める式は，$3n-3$になる。

図３のように囲み方を変えてみると，碁石全部の個数は，$3(n-2)+3$という式で求めることができます。碁石全部の個数を求める式が$3(n-2)+3$になる理由について，下の説明を完成しなさい。

図３



説明

> したがって，碁石全部の個数を求める式は，$3(n-2)+3$になる。

（図３：H.25 全国学力・学習状況調査 B$\boxed{6}$(3)）

正答の条件は，次の（a），（b），（c）について記述しているもの，または（d）について記述しているものである．

（a）頂点にある３個以外の碁石を，辺ごとに囲んでいること．

（b）１辺には（n－2）個あり，そのまとまりが３つあること．

（c）碁石全部の個数は，３つのまとまりと頂点の碁石の総数の和であること．

（d）３（n－2）＋3 と同値な式を示し，その式で碁石全部の個数を求められることがすでに問題文で説明されていること．

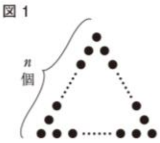
この設問の正答率は，25.3%である．特に，無解答率は 42.2%であり，事象を数学的に表現したり，数学的に表現された結果を事象に即して解釈したりすることを通して，事柄が成り立つ理由を筋道立てて説明することは多くの生徒ができていない．したがって，授業では図３の中の**図２**の考え方の囲み方で碁石全部の個数を求めると(擬変数)×3－3 という式で表されることを確認し，その囲み方と式を比べて，式の擬変数が「1 辺の碁石の個数」を意味することや，「－3」が「2 度数えてしまっている碁石の個数」を意味することなどを読み取る場面を設定する．その上で，図３の中の**図２**の囲み方に即して，式(擬変数)×3－3 で碁石全部の個数を求められる理由を説明できるように指導する．

(2) 数学的に表現された結果を事象に即して解釈し説明すること

事象を数学的に考察する場面では，数学的な結果を事象に即して解釈することが大切であると考える．そこで，今回の授業では，正三角形に並んだ碁石全部の個数を求める式の意味を読み取り，立式の根拠について説明する場面を位置付けた．数学的に表現された結果を事象に即して解釈し説明することに関連して，H.25 全国学力・学習状況調査 B$\boxed{6}$(2)（図２）では，「数学的に表現された結果を事象に即して解釈することができるかどうかをみる.」ことを趣旨として次のような設問が出題されている（国立教育政策研究所，2013）.

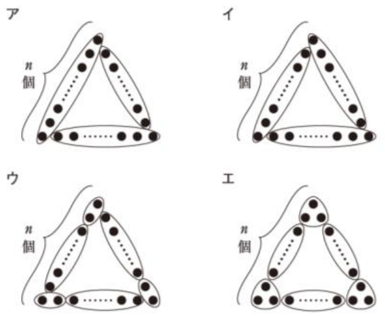
$\boxed{6}$ 図１のように，１辺にn個ずつ碁石を並べて正三角形の形をつくり，碁石全部の個数を求めます。

図１



次の（1）から（3）までの各問いに答えなさい。

（2）図１で，碁石のまとまりを考えて，ある囲み方をすると，碁石全部の個数は，$3(n-1)$という式で求めることができます。その囲み方が，下のアからエまでの中にあります。正しいものを１つ選びなさい。



（図２：H.25 全国学力・学習状況調査 B$\boxed{6}$(2)）

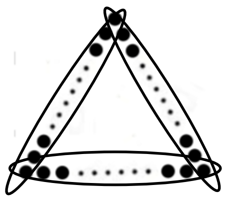
正答はイであるが，この設問の正答率は 57.5%と低く，数学的に表現された結果を事象に即して解釈することは多くの生徒ができていない．誤答については，アを選択した反応率が 18.9%であり，３（n－1）という式の係数 3 から，まとまりが 3 つであることに着目して選択した生徒がいると考えられる．また，エを選択した反応率は，13.7%であり，３（n－1）という式の係数３から，３個の碁石が囲まれていることに着目して選択した生徒がいると考えられる．したがって，授業では，（n－1）×3 の式から（n－1）個のまとまりが３つあることを捉え，図１において（n－1）個のまとまりをつくるために，１辺に並んでいる n 個の碁石から一方の頂点の碁石を除いた部分に着目し，囲み方を考えられるように指導する．

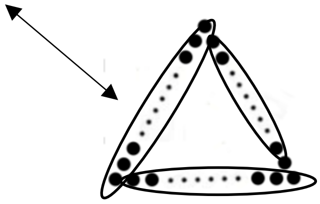
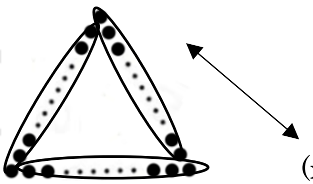
４．本時の展開

<table>
<tr><th>教師の働きかけ（■）・予想される児童の反応（〇）</th><th>留意点（□）・評価（※）</th></tr>
<tr><td>１　問題の把握と課題の明確化

問題
　右の図のように，１辺にいくつかの碁石を並べて，正三角形をつくります.
　このとき，碁石は全部で何個だろうか.


〇どのように求めればよいのかな.
〇式がつくれそう.

課題　碁石全部の個数はどんな式で求められるのかな？</td><td>□１辺の個数が３，４個のとき，それぞれ碁石は全部で何個になるのか画面で確認した後，碁石の個数が 11 個のときの図を画面に提示し，約２秒後に画面を消す.「碁石は全部で何個だろうか」と板書し，問題を提示する.
□「どのように考えればよいのか」問いかけ，課題につなげる.</td></tr>
<tr><td>２　個人思考・集団思考
①11×3−3　①’10×3−3　①”12×3−3
②(11−1)×3　③(11−2)×3＋3　④11＋(11−1)＋(11−2)　など
■11×3−3 はどのように考えたのかな？
〇

(１辺の碁石の個数)×3−3</td><td>□プリント配付
□「線で囲んでいるんだ」「ここ囲まないの？」などとつぶやきながら机間指導する.
□式だけ板書させる.
□①の考えを取り上げる.</td></tr>
<tr><td>■では，11×3−3 の「−3」って図ではどういう意味なのかな？
〇辺ごとに全部囲むと 11×3 だけど，頂点の碁石を２回数えてしまったから 11×3 から３をひくという意味です.
■同じような考え方で式をつくった人はいるかな？
〇10×3−3，12×3−3 とつくりました.
■同じような考え方の式ですが，これらの式でいつも一定で変わらない数はどれで，いろいろと変わる数はどれなのかな？
〇10，11，12 の数のところがいろいろと変わります．ほかの数はいつも一定です.</td><td>□図と式がどのようにつながるのかを意識させて説明させる.
□生徒に黒板の前で説明させる.
□板書に加筆しながら，「what」や「where」で問いかけ,「why」や「how」で問い返す.
□定数と変数の違いに着目させる.</td></tr>
<tr><td>■それぞれどんな意味があるのかな？
〇10，11，12 は,「１辺の碁石の個数」です．ほかの数は,「１辺の碁石の個数のかたまりが３つ分」,「重なっている３つ分を引く」という意味です.
■いろいろと変わる数のかわりに使えるものは何だったかな？
〇「１辺の碁石の個数」のところを文字に表すこともできると思います.
〇「１辺の碁石の個数」を x 個とすれば，x×3−3 という式にまとめて表せます.</td><td>※１辺の碁石の個数を擬変数や文字を使って表した碁石の総数を求める式の意味について説明している.（口述，記述）
□擬変数として考えている部分を文字に表す文脈をつくる.</td></tr>
<tr><td>■では，先ほど自分がつくったほかの考えの式を,「１辺の碁石の個数」を x 個として表すと，どんな式になるのかな？</td><td>□机間指導で指名計画を立てる.</td></tr>
</table>

○（②について）$(x-1)\times3$ になると思います．	□式だけ板書させる．
■この式で考えた人は，どのような囲み方で考えたのかな？	
○$(x-1)\times3$ 	□図に囲みを入れさせる．場合によっては，教師が囲みを入れて誤答を示し，ゆさぶりをかけることも考えられる． □理解が不十分な子供がいる場合は，具体数を入れて考えさせる．
○おかしいと思います．	
■どこがおかしいのかな？	
○$x-1$ のかたまりが 3 つのはずなのに，そうなっていないからです．	□生徒に黒板の前で説明させる．
■では，どのように囲んで考えたのかな？	
○  $(x-1)\times3$	□板書に加筆しながら，「what」や「where」で問いかけ，「why」や「how」で問い返す．
■$x-1$ の「-1」ってどういう意味なのかな？	
○正三角形の辺ごとに 1 つの頂点以外を囲んでいるので，1 つのまとまりは $x-1$(個)です．同じまとまりが 3 つあり，それぞれのまとまりが重ならないようにすべての碁石を囲んでいるので，碁石全部の個数は，$(x-1)\times3$ になります．	※1 辺の碁石の個数を文字を使って表した碁石の総数を求める式の意味について説明している．（口述，記述）
■この囲み方だったら，どんな式になるのかな？	□生徒に黒板の前で説明させる．
○x 個のかたまりと，$x-1$(個)のかたまりと，$x-2$(個)のかたまりがあると考えているので，$x+(x-1)+(x-2)$です．	□$(x-2)\times3+3$ の考えについては，変化に着目して立式することもできるが，本時では取り上げない．
4　振り返り	
■碁石全部の個数はどんな式で求められるのかについて考えるときのポイントは何かな？	□碁石全部の個数はどんな式で求められるのかについて考えるときの方法を振り返る．その際，図の囲み方と式のつながりを考えたことを確認し板書する．
○「1 辺の碁石の個数を文字を使って表して考えること」，「同じまとまりをつくること」，「重ねて数えているときは重なった分をひくこと」がポイントです．	
■もしも，正三角形がほかの形に変わったら，碁石全部の個数はどんな式で求められるのかな．どんな形に変えて考えてみたいかな？（レポート　～碁石の数え方～）	□プリント配付
①正方形　②正五角形　など	

＜参考文献＞

・文部科学省（2017）．小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　算数編．

・国立教育政策研究所（2013）．平成 25 年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書．pp.124-128.

・藤井斉亮（2006）．初等教育段階における代数的思考の育成－擬変数の理解に焦点を当ててー数学教育論文発表会論文集 39．pp.307-312.

・藤井斉亮 (2002)．数と計算の学習指導における擬変数の役割に関する研究．数学教育論文発表会論文集 35．pp.163-168.

・早勢裕明・赤本純基ほか (2020)．中学校数学科 Before&After でみる　実践！全単元の「問題解決の授業」．明治図書．

・藤原大樹（2015）．中学校数学科における数学的な思考力・表現力及び自律的活動力の育成を目指したレポート作成の実践．個人研究論文集第 10 号

レポート　～碁石の数え方～

授業で，正三角形に並んだ碁石全部の個数の求める式を，１辺の碁石の個数を文字を使って表し考えました.

そこで次のレポート課題に取り組みましょう.

レポート課題

「1 辺に x 個の碁石を並べて$\boxed{\text{正三角形}}$をつくるとき，碁石は全部で何個になるか求める式をかきなさい.」という問題の条件の$\boxed{}$の部分を変えて，新たな問題をつくり，これを解きなさい．また，碁石は全部で何個になるか求める式を考えられる限り書き，どのように考えたのか図を使って説明しなさい.

【留意点】

○新しい問題を２つ以上つくりましょう.

○文献やインターネットなどを参考にせず，自分の頭で考えましょう.

○難しければ途中まででも構いません.

●「$\boxed{\text{正三角形}}$を$\boxed{}$に変える」など，何を何に変えたのかを明記しましょう.

●「～と思ったから」など，条件をなぜそう変えたのかを明記しましょう.

●最後に活動を振り返り，感想を書きましょう.

○評価については以下の通りです.　　　　※Ａの中で極めてよいものはＡ＋

評価の観点	Ｂの評価規準（◎：具体的なＡの姿の例）	評価
主体的に学習に取り組む態度	条件を一部変えたときに, 説明やその結論がどのように変わるかについて関心をもち, 命題が成り立つことを文字式を用いて説明しようとしている. ◎発展的に考えるよさを感じている. ◎探究の過程をわかりやすく説明しようとしている.	
思考・判断・表現	文字を用いて表現したり，その意味を読み取ったりして，命題が成り立つことを説明することができる. ◎もとの問題を含め，複数の問題を統合的にみている. ◎つくった問題の構造を見極めている. ◎条件の変え方を工夫して本質に迫っている.	