# 令和３年度　北海道教育大学札幌校
# 編入学試験 問題用紙

## 教員養成課程 理数教育専攻　算数・数学教育分野

令和２年 11 月 29 日

注意事項

1 試験開始の合図があるまでは，この表紙を開かないこと。

2 この問題用紙は１枚，解答用紙は３枚，下書き用紙は１枚あります。

3 「問題１」「問題２」「問題３」すべてに解答すること。

4 解答用紙は，「問題１」「問題２」「問題３」ともに１枚あります。

5 受験番号は，解答用紙の指定欄に記入すること。

6 解答用紙３枚を提出し，表紙・問題用紙・下書き用紙は，試験終了後持ち帰ること。なお，いかなる理由があっても解答用紙以外は受理しません。

7 試験中に，問題用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等により交換を必要とする場合は，手をあげて監督者に知らせること。

専門科目 （1／1）

教員養成課程 理数教育専攻　算数・数学教育分野

**問題 1.** $m$ 行 $n$ 列の実行列全体のなす集合を $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ で表す（但し $1 \leq m \leq n$ とする）。行列 $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ に対して，集合 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ 上の関係 $A \sim B$ を $A = PBQ$ となる $m$ 次正則行列 $P$ と $n$ 次正則行列 $Q$ が存在することとして定める。このとき，次の各問いに答えよ。(100 点)

(1) $\sim$ は集合 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ 上の同値関係であることを確かめよ。

(2) 商集合 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})/\sim$ の完全代表系を一組求めよ。

(3) 商集合 $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})/\sim$ と集合 $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$ の間に全単射が存在することを示せ。

**問題 2.** 区間 $I$ を定義域とする関数の列 $\{f_n\}$ と関数 $f$ について，条件

$$(*) \quad \begin{cases} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対してある自然数 } N_\varepsilon \text{ が存在し，} \\ n \geqq N_\varepsilon \text{ かつ } x \in I \text{ ならば } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ である。} \end{cases}$$

を満たすとき，$\{f_n\}$ は $I$ において $f$ に一様収束するという。次の各問いに答えよ。(100 点)

(1) $\{f_n\}$ は区間 $I$ において $f$ に一様収束するとする。各 $f_n$ が $I$ 上の連続関数ならば $f$ も $I$ 上の連続関数となることを示せ。

(2) 各 $x \in I$ ごとに $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束するというだけでは，$f_n$ が $I$ 上の連続関数であっても $f$ が不連続な関数となる場合がある。そのような具体例を 1 つ答えよ。

(3) $a < b$ とし，$\{f_n\}$ は区間 $[a, b]$ で定義された連続関数の列とする。$\{f_n\}$ が $[a, b]$ において $f$ に一様収束するとき，

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つことを示せ。

**問題 3.** $A$ を $n \times n$ 行列とし，$B = {}^tAA$ とおく。次の各問いに答えよ。(100 点)

(1) 任意の列ベクトル $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$${}^t\vec{x}B\vec{x} \geqq 0$$

であること，また等号がいえるのは $A\vec{x} = \vec{0}$ のときに限ることを示せ。

(2) 列ベクトル $\vec{x}(\neq \vec{0}) \in \mathbb{R}^n$ と実数 $\lambda$ に対し $B\vec{x} = \lambda\vec{x}$ ならば $\lambda \geqq 0$ であることを示せ。

(3) $B$ の階数と $A$ の階数が等しいことを示せ。