令和3年度入学試験問題

数　学

(教員養成課程)

注意事項

1　試験開始の合図があるまでは, この問題冊子を開かないこと。

2　問題冊子は表紙を含めて1～3ページです。

3　解答用紙は3枚, 計算用紙は1枚です。

4　解答は指定された解答用紙に記入すること。裏面には何も書かないこと。

5　受験番号は解答用紙の指定欄に記入すること。

6　解答は, 答えだけではなく, 計算の過程や説明も書くこと。

7　解答用紙のみを提出し, 問題冊子・計算用紙は試験終了後, 持ち帰ること。なお, いかなる理由があっても解答用紙以外(計算用紙など)は受理しません。

8　試験中に問題冊子の印刷不鮮明, ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等により交換を必要とする場合は, 手を挙げて監督者に知らせること。

問題 1. (70 点)

次の問いに答えなさい。

(1) $0 < \alpha < 2\pi,\ 0 < \beta < 2\pi$ とする。$\cos\alpha = \cos\beta$ ならば, $\alpha = \beta$ または $\alpha + \beta = 2\pi$ であることを示しなさい。

(2) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ のとき, $\cos 2\alpha$ と $\cos 4\alpha$ の値を求めなさい。

(3) (2) の α の値を求めなさい。

(4) $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\cos\beta \geqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ のとき, $\beta < \dfrac{\pi}{4}$ であることを示しなさい。

問題 2. (60 点)

$t > 0,\ h > 0$ に対し, 座標平面上に点 $\mathrm{A}(t,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(t+h,\ 0)$ をとる。関数 $y = x^2$ のグラフに点 A から引いた接線のうち, 傾きが正であるものを ℓ とし, 接点を P とする。次の問いに答えなさい。

(1) 点 P の座標を, t を用いて表しなさい。

(2) n を自然数とする。$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $t = \dfrac{k}{n},\ h = \dfrac{1}{n}$ とするときの $\triangle\mathrm{ABP}$ の面積を S_k で表す。このとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めなさい。

(3) $t = 1$ とするとき, $y = x^2$ のグラフと x 軸および直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

問題 3. (70 点)

点 A$(0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。また, x 軸の $x \geqq 0$ の部分を動く点を P$(t, 0)$ とし, 点 P を中心とする半径 2 の円を C' とする。次の問いに答えなさい。

(1)　円 C と円 C' の共有点が 2 個であるような t の範囲を求めなさい。

以下の (2), (3) では, (1) の共有点を $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$ とする。ただし, x 座標の大きい方を $\mathrm{Q_2}$ とする。

(2)　直線 $\mathrm{PQ_2}$ が円 C と接するとき, 点 $\mathrm{Q_2}$ の座標を求めなさい。

(3)　線分 $\mathrm{Q_1Q_2}$ が円 C の直径になるとき, $\triangle \mathrm{PQ_1Q_2}$ は正三角形である。このとき 3 点 P, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$ の座標を求めなさい。